



Centro de
Investigación en
Matemáticas, A.C.



MODELANDO POBLACIONES Y LA EMERGENCIA DE REDES EN INTERNET

Profesor: OSVALDO ANGUNCIO HERNÁNDEZ

ESCUELA DE VERANO.

PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA, CIMAT, GUANAJUATO

7-9 DE JULIO 2025

DURACIÓN: 4.5 HORAS

Objetivo del curso:

En este curso se estudiarán diversos modelos probabilísticos que describen la evolución de poblaciones y la estructura de redes.

Comenzaremos con el modelo de árboles de Bienaymé–Galton–Watson, el cual representa el árbol genealógico generado por un individuo fundador (o ancestro común) que se reproduce según reglas aleatorias. Analizaremos una forma de codificar dicha población y caracterizaremos condiciones bajo las cuales la población se extingue o sobrevive indefinidamente.

Posteriormente, abordaremos modelos clásicos de gráficas aleatorias y redes complejas. Iniciaremos con el modelo de Erdős–Rényi, que describe la formación de enlaces en una red cuyos nodos son homogéneos e indistinguibles. Estudiaremos la conectividad de esta red y determinaremos si existe una componente gigante que agrupe a la mayoría de los vértices, o si, por el contrario, la red se fragmenta en muchas subredes pequeñas.

Finalmente, exploraremos un modelo que describe la evolución de redes complejas reales, como la red social Facebook. Analizaremos cómo este modelo reproduce la formación de “superestrellas”: nodos altamente conectados que atraen nuevos enlaces de manera preferencial, reflejando el fenómeno de que los nuevos miembros tienden a conectarse con aquellos que ya son populares.

Temario:

1. Motivaciones:
 - a) Algunos modelos poblacionales y sus aplicaciones
 - b) Redes complejas en el mundo real y sus aplicaciones
2. Procesos de ramificación y árboles de Bienaymé–Galton–Watson
 - a) Extinción
 - b) Exploración del árbol

- c) Codificación mediante excursiones
- d) Procesos de ramificación binomiales y Poisson
- 3. Modelo de Erdős-Rényi
 - a) Transición de fase
 - b) La componente gigante
 - c) Comparación con procesos de ramificación
- 4. Modelo de preferential attachment
 - a) Sucesión de grados
 - b) Emergencia de superestrellas.

REFERENCIAS

- [AN04] K. B. Athreya and P. E. Ney, *Branching processes*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, Reprint of the 1972 original [Springer, New York; MR0373040]. MR 2047480
- [BA99] Albert-László Barabási and Réka Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science **286** (1999), no. 5439, 509–512. MR 2091634
- [Bol01] Béla Bollobás, *Random graphs*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 73, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR 1864966
- [Dur24] Rick Durrett, *Dynamics on graphs*, 2024.
- [ER59] P. Erdős and A. Rényi, *On random graphs. I*, Publ. Math. Debrecen **6** (1959), 290–297. MR 120167
- [ER60] ———, *On the evolution of random graphs*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **5** (1960), 17–61. MR 125031
- [JLuR00] Svante Janson, Tomasz Ł uczak, and Andrzej Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley-Interscience, New York, 2000. MR 1782847
- [KA15] Marek Kimmel and David E. Axelrod, *Branching processes in biology*, second ed., Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 19, Springer, New York, 2015. MR 3310028
- [NBW06] Mark Newman, Albert-László Barabási, and Duncan J. Watts (eds.), *The structure and dynamics of networks*, Princeton Studies in Complexity, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006. MR 2352222
- [vdH17] Remco van der Hofstad, *Random graphs and complex networks. Vol. 1*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, [43], Cambridge University Press, Cambridge, 2017. MR 3617364
- [vdH22] Remco van der Hofstad, *Random graphs and complex networks, volume 2.*, 2022, Consulted 01.02.2023.